4. 지수함수와 로그함수

[단원의 이론적 배경]

(1) 함수의 발달

함수는 독립변수와 종속변수 사이의 종속 관계를 기술하기 위하여 생겨났다. 역학에서 두 변량 사이의 관계를 연구한 갈릴레이 등에 의하여 개념화된 함수는 17세기에 이르러 물체의 운동을 나타내는 곡선을 연구하는 가운데 도입되었고 곡선과 결합된 함수를 나타내는 방정식이 연구되면서 17세기말경 대수적인 함수가 등장하였다.

데카르트(Descartes,R. ; 1596~1650)는 함수의 본질은 '따라 변하는 두 변량 사이의 대응 관계'라고 주장하였으므로 데카르트를 함수의 창시자로 보기도 한다. 함수(function)란 용어는 1692년 독일이 라이프니츠(Leibniz,G.W. ; 1646~1716)가 처음 사용하였고, 함수 기호 f는 18세기에 오일러(Euler, L. ; 1707~1783)가 처음 사용하였다. 해석기하학의 발달과 함께 여러 곡선이 방정식으로 표현되면서 오일러는 '일변수 함수란 그 변수와 몇 개의 상수로 이루어진 해석적인 식'이라고 정의하였다. 18세기 후반에는 하나의 식으로 표현되지 않는 함수가 발견되었고, 푸리에(Fourier,J.B.J.;1768~1830), 코시(Cauchy,A.L.;1789~1857), 디리클레(Dirichlet,P.; 1805~1859) 등에 의하여 주어진 구간의 변량 x에 대하여 y의 값이 각각 정해질 때, y는 x의 함수라고 정의하였다. 한편, 칸토어(Cantor,G. ; 1845~1918) 에 의하여 집합론이 정립된 후, 20세기에는 디리클레의 정의에 의한 '대응'이라는 함수 개념이 보편화되었으며, 바이어슈트라스(Weierstrass,K.T.;1815~1897),데데킨트(Dedekind,J.W.R.; 1831~1916)등의 연구로 오늘의 함수 이론이 완성되었다. 오늘날 우리는 두 집합 A와 B에 대하여 함수 $f: A \to B$를 'A의 각 원소에 B의 한 원소가 대응되는 관계'로 정의하고, 함수 f의 그래프는 순서쌍의 집합 $G(f)=\{(a,b)\,|\,a\in A,\ b=f(a)\}$로 정의되므로 곱집합 $A\times B$의 부분집합이다.

(2) 지수함수와 로그함수

$a>0$이고 $a\neq 1$인 실수 a와 임의의 실수 x에 대하여 실수 지수 a^x의 값은 단 하나 존재하고, x의 값이 연속적으로 변하면 a^x의 값도 연속적으로 변하게 된다. 따라서 x의 값이 변함에 따라 a^x의 값도 변하므로 $y=a^x$은 함수가 되며, 이 함수를 a를 밑으로 하는 지수함수라고 한다. 실제로 $y=a^x$의 순서쌍을 좌표평면에 나타내고 매끄러운 곡선으로 연결하면 지수함수의 그래프가 되며, $a>1$이면 증가하는 그래프이고 $0<a<1$이면 감소하는 그래프가 되므로 지수함수 $y=a^x$의 역함수가 존재하게 된다. 지수함수 $y=a^x$의 역함수는 로그의 정의에 의하여 $y=\log_a x(a>0$이고 $a\neq 1)$이며, 이 함수를 a를 밑으로 하는 로그함수라고 한다. 로그함수 $y=\log_a x$는 지수함수의 역함수로 정의하였으므로 로그함수의 그래프는 지수함수의 그래프를 이용하여 그린다.

(3) 도형의 이동
지수함수와 로그함수의 그래프는 각각 좌표평면 위의 곡선으로 나타난다. 따라서 지수함수와 로그함수의 그래프를 도형 $f(x,y)=0$으로 나타내면 다음과 같은 도형의 이동의 성질에 의하여 여러 가지 형태의 지수함수와 로그함수의 그래프를 그릴 수 있다.

◎ 도형의 평행이동
도형 $f(x,y)=0$을 x축의 방향으로 a, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은 다음과 같다. $f(x-a,\ y-b)=0$

◎ 도형의 대칭이동
도형 $f(x,y)=0$을 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 도형은 각각 다음과 같다. $f(x,-y)=0$, $f(-x,y)=0$, $f(-x,-y)=0$
예를 들면, 지수함수 $y=-2^x$, $y=2^{-x}$, $y=-2^{-x}$의 그래프는 지수함수 $y=2^x$의 그래프를 각각 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.

(4) 오일러(Euler,L. ; 1707~1783)

지수함수의 역함수로 로그함수를 정의한 수학자인 오일러는 스위스의 수학자, 물리학자로, 주로 독일과 러시아의 학사원을 무대로 활약하였다. 그의 연구는 수학, 천문학, 물리학뿐만 아니라 의학, 식물학, 화학 등 많은 분야에 광범위하게 걸쳐 있다. 처음에는 목사가 되기 위하여 대학에서 신학과 헤브라이 어를 공부하였으나, 수학에서 요한 베르누이의 관심을 끌어 곧 다니엘 베르누이, 니콜라스 베르누이와 사귀었다. 수학자로서의 연구를 시작한 시기는 뉴턴이 죽은 시기에 해당하여 해석기하학, 미적분학의 개념은 갖추어져 있었으나 충분한 체계가 서 있지 않았다. 이러한 미적분학을 발전시켜 '무한해석개론', '미분학 원리', '적분학 원리', '변분학'을 창시하였다. 이 밖에도 대수학, 정수론, 기하학 등 여러 방면에 걸쳐 큰 업적을 남겼다. 그 중에도 삼각함수의 생략 기호(sin, cos, tan)를 사용하였으며, '오일러의 정리'등과 같이 그의 이름이 붙은 정리가 매우 많다.

(5) 학습목표
인구 증가, 방사성 물질의 붕괴, 소음, 산성비, 지진 등은 환경문제의 주요인이다. **인구 증가**나 **방사성 물질**을 다룰 때는 지수함수가 필요하며, **95dB의 소음**, **pH 5.2의 산성비**, **규모 4.1의 지진** 등 실생활에서 접하는 수치는 로그함수를 이용하여 복잡한 값을 간단하게 바꾼 것이다.

① 지수를 실수까지 확장한 지수함수의 뜻을 알고, 지수함수의 그래프를 그려서 그 성질을 이해한다.
② 간단한 형태의 지수방정식과 지수부등식을 풀 수 있도록 한다.
③ 지수함수의 역함수로써 로그함수의 뜻을 알고, 로그함수의 그래프를 그려서 그 성질을 이해한다.
④ 간단한 형태의 로그방정식과 로그부등식을 풀 수 있도록 한다.

1. 지수함수

(1) 지수함수 $y=a^x$ 의 그래프

실수 x에 대하여 a^x를 정의하는 방법을 배웠으니, 지금부터는 x에 a^x를 대응시키는 함수 $y=a^x$을 공부하겠습니다. 이런 함수를 「a를 밑으로 하는 **지수함수**」라고 부릅니다. 여기서 밑 a가 음수가 되면 x가 실수일 때, 지수 a^x이 정의되지 않는 것이 있으므로 밑 a는 반드시 양수이어야 하고, 그 중에서 1은 제외됩니다. 만일 $a=1$이면 함수 $y=a^x$는 $y=1$로서 상수함수가 되어 지수함수로서 의미가 별로 없지요?

> 지수함수 $y=a^x$ 에서 <u>**밑 a는 1이 아닌 양수**</u>이다.

따라서 a의 범위는 크게 $0<a<1$, $a>1$의 두 부분으로 나뉘어 집니다.

예를 들어 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=(0.7)^x$ 등은 $0<a<1$인 경우이고,

$y=2^x$, $y=(\sqrt{3})^x$ 등은 $a>1$인 경우에 해당합니다.

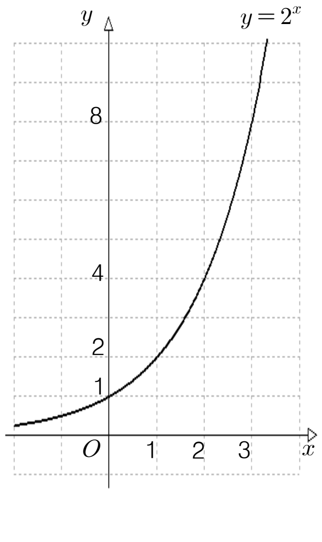
이 두 가지 함수를 차례로 알아보도록 합시다.

<u>① $a>1$**인 경우**</u>

예를 들어, 함수 $y=2^x$을 만족시키는 x, y의 값을 몇 개 찾아보면 다음 표와 같습니다.

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3 $\cdots$
y	$\cdots$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8 $\cdots$

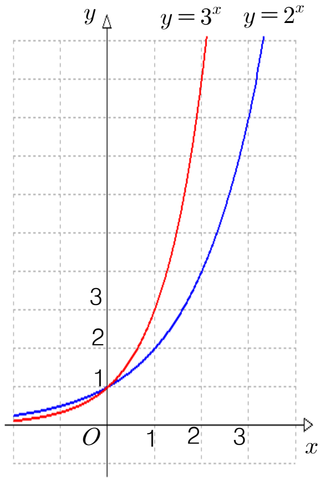
이런 점 (x, y)를 보다 많이 찾아내서 좌표평면에 표시하면 다음과 같은 아름다운 곡선이 그려집니다.



특징을 살펴볼까요?

① $2^0=1$이므로, 곡선은 점 $(0, 1)$을 지납니다.
② x값에 관계없이 $2^x>0$이므로, 곡선은 x축의 위에만 그려집니다.
③ 점근선은 x축입니다. 따라서 한쪽에만 점근선이 있기 때문에 비대칭입니다.
④ x값 하나에 y값이 하나만 대응하는 일대일대응입니다.
⑤ x값이 커질수록 대응하는 y값도 커지므로, 곡선은 오른쪽 위로 향하는 모양입니다.

곡선 $y=3^x$도 곡선 $y=2^x$과 비슷한 모양입니다. $x=1$을 두 식에 대입해보면 두 곡선의 구부러지는 정도를 쉽게 알 수 있습니다.

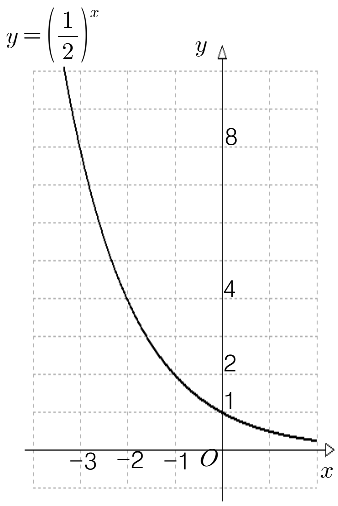


따라서 둘 다 점 $(0, 1)$을 지나면서 오른쪽 위로 향하는 곡선을 그려주면 됩니다.

<u>② $0<a<1$인 경우</u>

예를 들어, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 그려봅시다. 이것은 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$이므로, $y=2^x$에 x 대신 $-x$를 대입한 식과 같습니다.

따라서 곡선 $y=2^x$을 y축에 대하여 대칭 이동시키면 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$이 그려집니다.



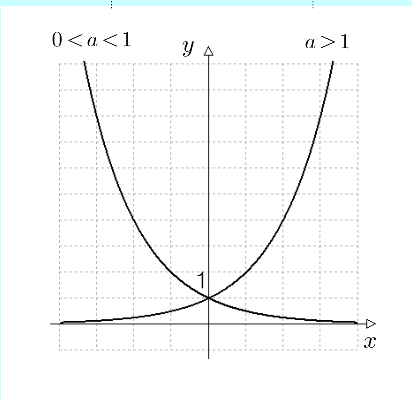
곡선의 특징은 다음과 같습니다.

① 항상 점 $(0, 1)$을 지납니다.
② 항상 x축의 위에 그려집니다.
③ 점근선은 x축입니다. 따라서 한쪽에만 점근선이 있기 때문에 비대칭입니다.
④ 일대일대응입니다.
⑤ x값이 커질수록 대응하는 y값은 작아지므로, 곡선은 오른쪽 아래로 향하는 모양입니다.

이를 종합하여 주요 성질을 적어보면 다음과 같습니다.

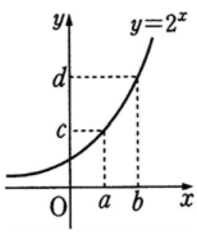
◆ 지수함수 $y=a^x$의 성질 ◆

y축에 대칭



① 항상 점 $(0, 1)$을 지난다.
② 모든 실수 x에 대하여 $a^x > 0$이다. 즉, 함수의 정의역은 실수 전체의 집합이고 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.
③ 일대일대응이다.
④ $a>1$이면 x가 커질수록 y도 커지고 $0<a<1$이면 x가 커질수록 y는 작아진다.

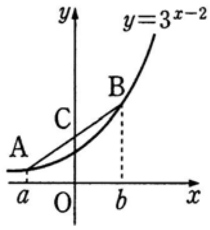
문제 1) 오른쪽 그림은 함수 $y=2^x$의 그래프이다. 다음 중 $\frac{d}{2c}$와 같은 것은? (단, 점선은 x축 또는 y축과 평행하다.)



① $\left(\frac{1}{2}\right)^{2a+b}$ ② $\left(\frac{1}{2}\right)^{2a-b}$ ③ 2^{2a+b}
④ 2^{2a-b} ⑤ 2^{b-a-1}

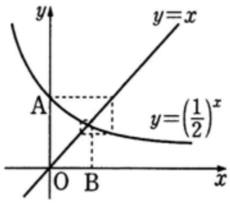
[풀이]

문제 2) 오른쪽 그림에서 y축 위의 점 C는 함수 $f(x)=3^{x-2}$의 그래프 위의 두 점 A, B를 이은 선분의 중점이다. 두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b라 할 때, $f(a)f(b)$의 값은?



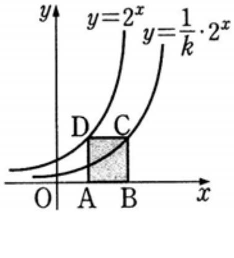
[풀이]

문제 3) 오른쪽 직선 $y=x$와 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프에서 점선들은 x축 또는 y축에 평행하며, 곡선 또는 직선과 만나는 점에서 직각으로 꺾인다. 곡선이 y축과 만나는 점을 A라 할 때, x축 위의 점 B의 x좌표의 값은?



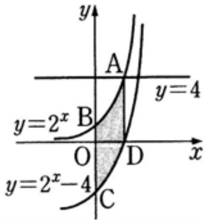
[풀이]

문제 4) 오른쪽 그림은 지수함수 $y=2^x$과 $y=\frac{1}{k}\cdot 2^x$의 그래프이다. x축 위의 점 A, B와 곡선 위의 점 C, D에 대하여 직사각형 ABCD는 정사각형이고, 넓이가 25이다. 이 때, 상수 k의 값을 구하여라. (단, $k>1$인 상수)



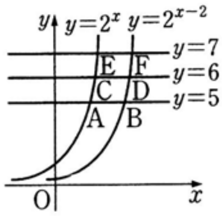
[풀이]

문제 5) 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=2^x$이 직선 $y=4$, y축과 만나는 점을 각각 A, B라고 하고, 곡선 $y=2^x-4$가 y축, x축과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 이 때, 색칠한 부분의 도형 ABCD의 넓이를 구하여라.



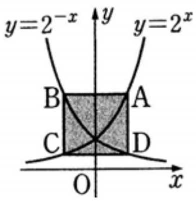
[풀이]

문제 6) 오른쪽 그림은 지수함수 $y=2^x$과 $y=2^{x-2}$의 그래프이다. 세 직선 $y=5$, $y=6$, $y=7$이 두 곡선에 의해 잘린 선분을 각각 AB, CD, EF라 한다. 이 때, 세 선분 AB, CD, EF의 길이의 합은?



[풀이]

문제 7) 두 함수 $y=2^x$, $y=2^{-x}$의 그래프 위의 네 점을 꼭지점으로 하는 직사각형 ABCD의 세로의 길이가 $\overline{\mathrm{AD}}=\frac{15}{4}$일 때, 이 직사각형의 넓이를 구하여라.



[풀이]

문제 8) 다음은 지수함수 $y=2^x$을 계수가 정수인 다항함수로 나타낼 수 없음을 보이는 과정이다.

> 2^x을 계수가 정수인 다항식으로 나타낼 수 있다고 가정하면,
> 정수 $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$에 대하여
> $2^x=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\ \ (a_n\neq 0)$ $\quad\cdots$㉠
> 로 나타낼 수 있다.
> 이제, ㉠의 양변에 x 대신에 $-x$를 대입하면
> $2^{-x}=a_n(-x)^n+a_{n-1}(-x)^{n-1}+\cdots+a_1(-x)+a_0$ $\quad\cdots$㉡
> 두 식 ㉠,㉡을 변끼리 곱하여 우변을 내림차순으로 정리하면
> $2^x\cdot 2^{-x}=a_n^2(-1)^nx^{2n}+\cdots+a_0^2$
> 즉, $a_n^2(-1)^nx^{2n}+\cdots+a_0^2=[(가)]$ $\quad\cdots$㉢
> 이 때, 등식 ㉢은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로
> $a_n^2=[(나)],\ \cdots,\ a_0^2=[(다)]$
> 이것은 가정에 모순이 된다. 따라서, 지수함수 $y=2^x$을 계수가 정수인 다항함수로 나타낼 수 없다.

위의 과정에서 (가),(나),(다)에 들어갈 수들의 합은?
[풀이]

문제 9) 지수함수의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 모두 골라라.

> ㄱ. $y=2^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭 이동시키면 $y=\dfrac{1}{2^x}$의 그래프가 된다.
> ㄴ. $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $y=2^x$의 그래프보다 아래에 놓이게 된다.
> ㄷ. $y=\sqrt{2}\cdot 2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동하여 $y=2^x$의 그래프를 얻을 수 있다.

[풀이]

문제 10) 다음 보기 중 함수 $y=2^x$의 그래프를 평행 이동하여 겹쳐질 수 있는 것을 모두 고르면?

|보기|

ㄱ. $y=8\cdot 2^x$　　ㄴ. $y=2(2^{x-1}+1)$　　ㄷ. $y=4^x-1$

① ㄷ　② ㄱ,ㄴ　③ ㄱ,ㄷ　④ ㄴ,ㄷ　⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

[풀이]

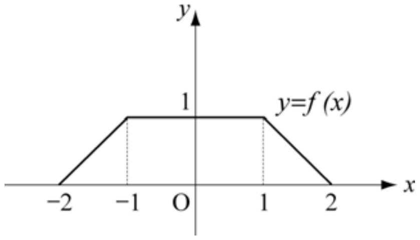
문제 11) 두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=x^2-2x+2$에 대하여, $y=(f\circ g)(x)$의 최소값은?

[풀이]

문제 12) $-5\leq x\leq 2$일 때, 함수 $y=2^{|x|-1}$ 의 최소값을 m, 최대값을 M이라 할 때, 이들의 곱 mM을 구하여라.

[풀이]

문제 13) 그림은 함수 $y=f(x)$ $(-2\leq x\leq 2)$의 그래프이다.



이 때, 함수 $g(x)=a^{f(x)}$ $(a>0,\ a\neq 1)$에 대하여 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

|보기|

ㄱ. 함수 $y=g(x)$의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.
ㄴ. $0<a<1$일 때, 함수 $y=g(x)$의 최대값은 1이다.
ㄷ. $a>1$일 때, 함수 $y=g(x)$의 최소값은 1이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

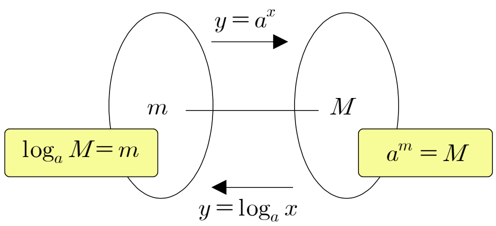
[풀이]

2. 로그 함수

(1) 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프

우리는 지수함수 $y=a^x$가 일대일대응이라는 사실을 공부하였습니다. 따라서 지수함수 $y=a^x$의 역함수가 존재하고 그것도 일대일대응입니다.

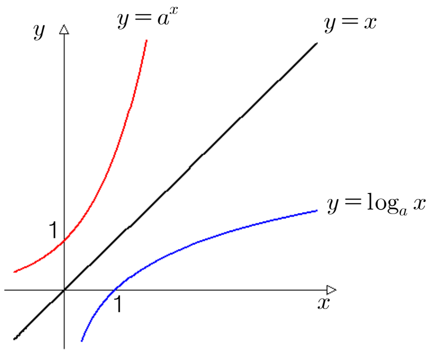
이 지수함수의 역함수를 a를 밑으로 하는 **로그함수**라 하고 $y=\log_a x$로 나타냅니다. 즉, 다음과 같은 대응 관계가 이루어집니다.



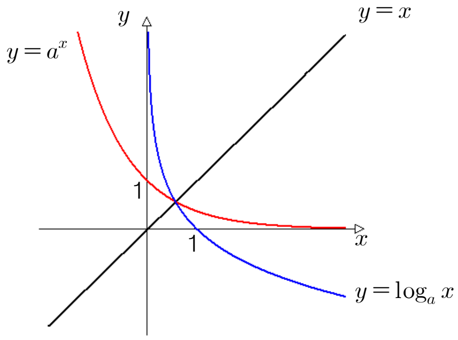
원래의 함수와 그 역함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이 된다는 것은 수학 10에서 배워서 알고 있을 것입니다.

따라서 지수함수 $y=a^x$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭 이동시키면 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프를 얻을 수 있습니다.

① $a>1$일 때

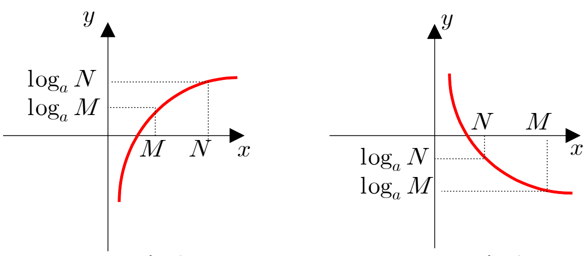


② $0<a<1$일 때



그림을 보면서 로그함수의 특징을 파악하면 다음과 같습니다.

① 그래프 위의 어떤 점을 잡더라도 x좌표는 항상 양수입니다. 즉, 로그함수의 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고 치역은 실수 전체의 집합입니다. 그리고 $\log_a 1=0$이므로 항상 점 $(1, 0)$을 지납니다.
그리고 y축을 점근선으로 가집니다.
② x좌표와 y좌표가 서로 하나씩만 대응하는 일대일대응입니다.
따라서 $\log_a M=\log_a N \Leftrightarrow M=N$
이것은 로그방정식을 풀 때 요긴하게 쓰일 것입니다.
③ $a>1$일 때는 x좌표가 커짐에 따라 y좌표도 커집니다.
따라서 $\log_a M<\log_a N \Leftrightarrow M<N$ ⬅ 부등호 방향이 그대로



$a>1$일 때 $0<a<1$일 때

한편, $0<a<1$일 때는 x좌표가 커짐에 따라 y좌표는 작아집니다.
따라서 $\log_a M<\log_a N \Leftrightarrow M>N$ ⬅ 부등호 방향이 반대로
이것은 로그부등식을 풀 때나 로그함수의 최대, 최소값을 구할 때 요긴하게 쓰일 것입니다.

문제 14) 함수 $y=\log(10-x^2)$의 정의역을 A, 함수 $y=\log(\log x)$의 정의역을 B라 할 때, $A\cap B$의 원소 중 정수의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[풀이]

문제 15) 함수 $y=\log_2(4x-1)+3$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축, y축의 방향으로 각각 m, n만큼 평행 이동시키면 포개어진다고 할 때, 곱 mn의 값을 구하여라.

[풀이]

문제 16) 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행 이동시킨 그래프가 두 점 $(-1, 1)$, $(0, 5)$를 지날 때, m^2+n^2의 값을 구하시오.

[풀이]

문제 17) 다음 보기의 함수 중 그 그래프를 평행이동하면 함수 $y=\log_2 x$의 그래프와 일치하는 것을 모두 써라.

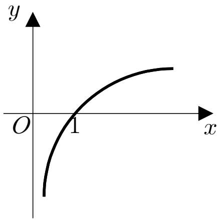
|보기|

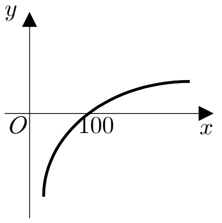
ㄱ. $y=\log_2(2x+3)$ ㄴ. $y=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{3x+1}$

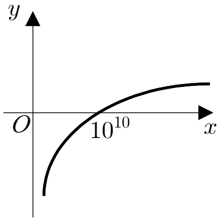
ㄷ. $y=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+3}$ ㄹ. $y=\log_8(x+2)^3$

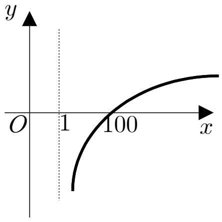
[풀이]

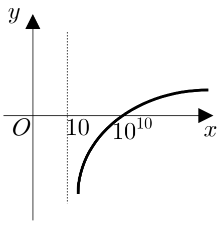
문제 18) 곡선 $y=\log\{\log(\log x)\}$의 개형으로 가장 적당한 것은?

①


②


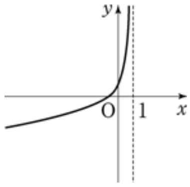
③


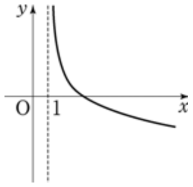
④


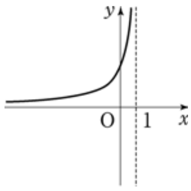
⑤


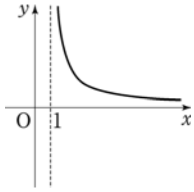
[풀이]

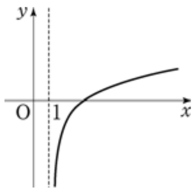
문제 19) 함수 $y=\log_2 \dfrac{2}{x-1}$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은?

①


②


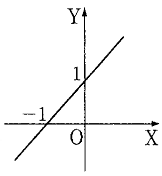
③


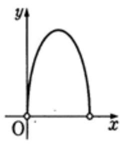
④


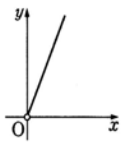
⑤


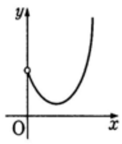
[풀이]

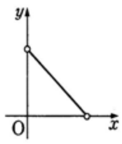
문제 20) X와 Y사이의 관계를 그래프로 나타내면 오른쪽과 같다. $\mathrm{X}=\log_2 x$, $\mathrm{Y}=\log_2 y$라 할 때, x와 y의 관계를 나타내는 그래프의 개형은?

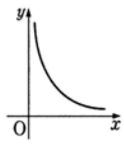


①


②


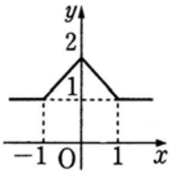
③


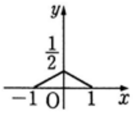
④


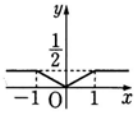
⑤


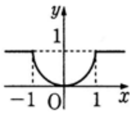
[풀이]

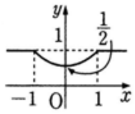
문제 21) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽과 같을 때, $y=2^{\log_{\frac{1}{2}} f(x)}$ 의 그래프는?

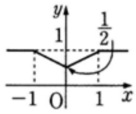


①


②


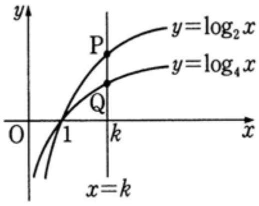
③


④


⑤


[풀이]

문제 22) 오른쪽 그림에서 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_4 x$의 그래프와 직선 $x=k$ 의 교점을 각각 P, Q라고 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}=3$을 만족하는 상수 k의 값을 구하여라. (단, $k>1$)



[풀이]

문제 23) 함수 $y=\log_2 x$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만난다. 두 교점의 좌표를 각각 $(\alpha,\ \log_2\alpha)$, $(\beta,\ \log_2\beta)$라 할 때, $2^{\alpha-\beta}=\dfrac{1}{3}$이면 $\dfrac{\alpha}{\beta}$의 값은?

[풀이]

문제 24) 함수 $y=\log_2 \frac{x}{4} \cdot \log_4 \frac{x}{2}$의 최소값을 구하여라.

[풀이]

문제 25) $3 \leqq x \leqq 5$인 x에 대하여 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$의 최대, 최소값을 구하여라.

[풀이]

문제 26) 로그함수 $y=\log_a(x^2-2x+28)$의 최대값이 -3일 때, 상수 a의 값은?

[풀이]

문제 27) 다음 물음에 답하여라.

(1) $1 \leq x \leq 1000$일 때, $y=10x^{2-\log_{10}x}$의 최대값 및 최소값을 구하여라.

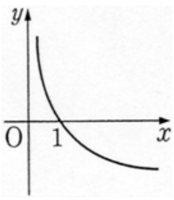
(2) $y^3x^{\log_{10}x}=10$이고 $x>0,\ y>0$일 때, x^2y의 최대값을 구하여라.

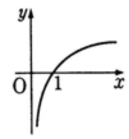
[풀이]

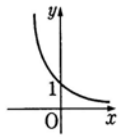
문제 28) 함수 $f(x)=1+3\log_2 x$에 대하여 함수 $g(x)$가 $(g\circ f)(x)=x$를 만족시킬 때, $g(13)$의 값을 구하시오.

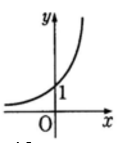
[풀이]

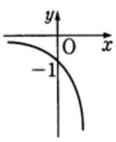
문제 29) 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프가 오른쪽 때, 다음 중 함수 $y=a^{-x}$의 그래프로 적당한 것은?

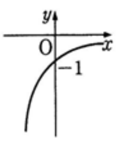


①


②


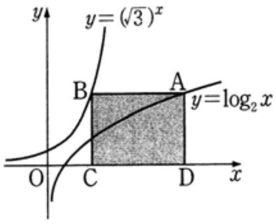
③


④


⑤


[풀이]

문제 30) 오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=\log_2 x$와 $y=(\sqrt{3})^x$ 위의 점 A, B와 x축 위의 두 점 C, D를 꼭지점으로 하는 직사각형 ABCD가 있다. 점 C의 좌표가 (2, 0)일 때, 직사각형 ABCD의 넓이를 구하여라.



[풀이]

☀ 참고 1] 복습 삼아서 지수함수와 로그함수가 갖고 있는 함수식의 특징을 각각 정리해 보겠습니다.

(1) 지수함수 $f(x)=a^x$ 의 특징

① 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)>0$입니다.

② 임의의 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)f(y)$입니다.

$f(x+y)=a^{x+y}=a^x a^y=f(x)f(y)$이니까요.

③ 임의의 실수 x, y에 대하여 $f(x-y)=\dfrac{f(x)}{f(y)}$입니다.

$f(x-y)=a^{x-y}=\dfrac{a^x}{a^y}=\dfrac{f(x)}{f(y)}$이니까요.

④ 임의의 실수 x, y에 대하여 $f(xy)=\{f(x)\}^y$ 입니다.

$f(xy)=a^{xy}=(a^x)^y=\{f(x)\}^y$ 이니까요.

(2) 로그함수 $g(x)=\log_a x$ 의 특징

① 로그의 진수는 양수이어야 하므로 $x>0$입니다.

② 임의의 양수 x, y에 대하여 $g(xy)=g(x)+g(y)$ 입니다.

$g(xy)=\log_a xy=\log_a x+\log_a y=g(x)+g(y)$ 이니까요.

③ 임의의 양수 x, y에 대하여 $g\left(\dfrac{x}{y}\right)=g(x)-g(y)$ 입니다.

$g\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y=g(x)-g(y)$ 이니까요.

④ 임의의 양수 x와 임의의 실수 y에 대하여 $g(x^y)=yg(x)$ 입니다.

$g(x^y)=\log_a x^y=y\log_a x=yg(x)$ 이니까요.

특히, $y=-1$이면 $g\left(\dfrac{1}{x}\right)=-g(x)$가 성립합니다.

문제 31) 함수 $f(x)$가 임의의 실수 x, y에 대하여

$$f(x+y)=f(x)f(y)$$

를 만족할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) $f(0)$의 값은?

(2) $f(1)=7$이라고 할 때, $f(2)$와 $f(3)$의 값은?

[풀이]

문제 32) 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=2^{ax+b}$ 이 임의의 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=4f(x)f(y)$를 만족한다. $f(8)=4$일 때, 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 소수점 아래 둘째 자리까지 구하시오.

[풀이]

문제 33) 함수 $f(x)=2\cdot 3^x$ 가 있을 때, 모든 x에 대하여 함수 $g(x)$가 $f(g(x))=x$ 를 만족시킨다. $g(3)$의 값은?

[풀이]

문제 34) 세 함수 $f(x)=(1+r_1)^x$, $g(x)=\left(1+\frac{r_2}{2}\right)^{2x}$, $h(x)=\left(1+\frac{r_3}{4}\right)^{4x}$에 대하여 $f(10)=g(10)=h(10)$일 때, r_1, r_2, r_3의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? (단, r_1, r_2, r_3는 양의 실수이다.)

① $r_1<r_2<r_3$ ② $r_1<r_3<r_2$ ③ $r_2<r_1<r_3$
④ $r_2<r_3<r_1$ ⑤ $r_3<r_2<r_1$

[풀이]

문제 35) $0<a<b<c<1$을 만족하는 세 실수 a, b, c에 대하여 $A=a^a b^b c^c$, $B=a^a b^c c^b$, $C=a^b b^c c^a$이라고 하자. 이때, A, B, C의 대소 관계로 옳은 것은?

① $C<B<A$ ② $B<C<A$ ③ $C<A<B$
④ $A<C<B$ ⑤ $B<A<C$

[풀이]

문제 36) 1이 아닌 임의의 양수 a, b에 대하여 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

|보기|

ㄱ. $4^a=5^b$이면 $a>b$이다.
ㄴ. $a^4=b^5$이면 $a>b$이다.
ㄷ. $\log_4 a=\log_5 b$이면 $a>b$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[풀이]

문제 37) $0<a^2<b<a$일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

|보기|

ㄱ. $a^b > a^{\frac{1}{b}}$

ㄴ. $b^a > b^{-a}$

ㄷ. $\log_a b > \log_b a$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[풀이]

문제 38) n이 자연수일 때, <보기>의 부등식 중 항상 성립하는 것을 모두 고르면?

|보기|

ㄱ. $\log_2(n+3) > \log_2(n+2)$

ㄴ. $\log_2(n+2) > \log_3(n+2)$

ㄷ. $\log_2(n+2) > \log_3(n+3)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[풀이]

3. 지수함수와 로그함수의 활용

☀ **참고 2]** 세균의 유전자와 세균의 분열

생물학에서는 인간의 복잡한 유전자 지도(genom)가 완성되어 일대 혁명기를 맞이하고 있다. 그러나 인간과는 달리 단세포 생물인 세균은 염색체인 DNA분자에 세균의 모든 유전자가 암호화되어 있다.

세균은 배양하기가 쉽고 배양 속도가 빠르기 때문에 유전자 연구에 많이 쓰인다. 특히, 실험실에서 가장 많이 쓰이는 세균인 대장균(E. Coli)은 $37℃$에서 20분마다 분열하여 그 수가 두 배씩 증가한다. 대장균의 DNA분자는 원통 모양으로 둘레가 약 $1mm$이고, 분자량은 2.56×10^{-9}정도이며 약 3.8×10^{6}개의 염기쌍을 포함한다.

한 개의 대장균은 분열을 시작한 지 몇 시간 후에 $10^{9}(10$억$)$개 이상이 되는지 알아보자. 한 개의 대장균이 n번 분열하여 10^{9}개가 된다면 $2^{n}=10^{9}$에서 $n\log2=9$이므로 다음을 얻는다.

$$n=\frac{9}{\log2}=\frac{9}{0.3010}\simeq30$$

즉, 30번 분열해야 한다.

그런데 대장균은 $37℃$에서 20분마다 한 번씩 분열하므로 $20\times30=600$분, 즉 10시간 후이면 약 10억 개가 됨을 알 수 있다.

☀ **참고 3]** 소리의 세기

소리(음파)는 물체의 진동에 의해 만들어진다.

소리는 진동체로부터 종파의 형태로 퍼져나간다. 즉, 밀한 부분과 소한 부분이 번갈아 가면서 이동하는 파동이다. 소리는 기체, 액체, 고체를 모두 통과할 수 있으나 진공은 통과할 수 없다. 소리는 강철과 같은 탄성체에서 가장 빠르다.

소리의 속도는 온도가 $0℃$인 건조한 공기 중에서 약 $330m/초$인데 매우 빠른 것 같지만 빛의 속도의 백만분의 일에 불과하다.

온도가 $1℃$올라갈 때 음속은 약 $0.6m/초$씩 빨라지는데 실내 온도에 해당하는 $20℃$에서의 음속은 약 $340m/초$ 정도가 된다.

소리의 세기는 음파의 진폭의 제곱에 비례하며 오실로스코프와 같은 기구를 이용하여 객관적인 기준으로 측정된다.

소리의 세기의 단위로 데시벨(dB)을 사용하며 이는 전화의 발명자인 벨의 이름을 딴 것이다. 정상적인 귀로 들을 수 있는 소리의 한계$(0dB)$에서 시작하여 $10dB$씩 증가하는 경우 소리의 세기는 10배씩 커진다. $10dB$의 소리는 $0dB$의 소리보다 10배 크며, $20dB$의 소리는 $10dB$의 소리보다 10배 크다.

귀로 느낄 수 있는 공기의 진동이 소리이며, 소리의 요소에는 크기, 높이, 맵시의 3가지가 있다. 이 중 소리의 크기는 공기의 진동에 의해 발생한 음파 진폭의 크고 작음에 의해서 결정된다. 진폭이 클수록 음은 크게 들리고, 진폭이 작을수록 작게 들린다. 소리의 크기를 물리적으로는 단위시간에 단위넓이에서 진동하는 일의 양을 가지고 나타내지만, 실제 귀로 느끼는 청감으로 나타낼 필요가 있다.

인간이 청감으로 느끼는 소리의 크기를 나타내기 위해서 데시벨(dB)이라는 단위를 사용한다.

데시벨은 인간이 느낄 수 있는 소리의 최소 크기 P_0에 대한 어떤 소리의 크기 P의 비를 로그값으로 나타낸 것이다. 즉,

$dB=10\log\left(\frac{P}{P_0}\right)$ (P_0는 보통 $10^{-12}\ W/m^2$으로 한다.)

크기가 $0(dB)$인 경우에 소리가 전혀 존재하지 않는다는 것이 아니라 $P=P_0$이므로 이 소리는 인간이 들을 수 있는 최소의 소리와 같음을 의미한다.
소리가 작을 때는 그 크기가 조금만 변하여도 민감하게 느낄 수 있지만, 소리가 클 때는 웬만큼 그 크기가 변하여도 잘 느낄 수 없다. 자극이 작을 때는 조금만 자극이 변해도 민감하게 느낄 수 있지만, 자극이 클 때는 웬만큼 변해도 잘 느끼지 못하기 때문이다. 즉, 감각량은 자극의 대수(Logarithm)값에 비례하기 때문이다.

☀ **참고 4]** 쥬라기 공원과 지수, 로그함수
영화 '쥬라기 공원'은 공룡시대를 재현하여 돈을 벌려는 과학자의 꿈이 재앙으로 변하는 스토리의 영화이다. 실제로 몇 억 년 전의 지구에는 수많은 공룡들이 있었던 것으로 추정하고 있다. 이들의 존재는 뼈, 이빨 등의 공룡화석에 의해서 입증되고 있다. 공룡화석으로 이들이 살았던 연대를 추정하는 데는 소위 방사성 동위원소를 이용한다. 이를테면,
방사성 탄소인 ^{14}C는 불안정한 원자 β선을 방출하면서 감소하는데, 동식물의 체내에 들어간 ^{14}C의 양은 생물이 살아있는 동안에는 외부와 평행을 유지하지만, 그 생물이 죽으면 체내에 있는 ^{14}C는 다시 감소하기 시작한다. 이런 성질을 이용하여 화석에 포함되어 있는 ^{14}C의 양으로 그 생물이 죽은지 몇 년이 지났는가를 알 수 있다.
일반적으로, 방사성 물질은 그 양에 비례한 속도로 감소하는데, ^{14}C가 감소하는 속도는 매우 느려서 그 반감기가 무려 5760년이나 된다. 반감기를 계산하는 공식은 $y=c\times e^{-kr}$(c는 처음의 방사성 물질의 양, $e=2.71828\cdots$)인데, 이와 같은 함수는 모두 지수함수로 나타내어 진다. 또 최근에는 생명공학 등에서 미생물을 증식하는 데 지수함수를 사용한다. 이와 같이, 지수함수는 로그함수와 함께 여러 가지 자연 현상의 성질을 규명하는데 유용하게 쓰이고 있다.

☀ **참고 5]** 정보의 엔트로피
현대 사회에서는 엄청난 양의 정보 교환이 활발하게 이루어지고 있다. 이에 따라 암호학이 발달하고 정보에 관한 이론이 필요하게 되었다.
정보량은 정보를 코드화하는 데 필요한 최소의 비트 수를 뜻한다. 예를 들면 남녀를 구별하는 정보는 두 종류이고 남자를 0, 여자를 1로 나타낼 수 있으므로 정보량은 1비트이다. 그러나 요일을 말할 때의 정보는 7종류이므로 이것을 구분하여 나타내기 위해서는 다음과 같이 적어도 3비트가 필요하다. 즉, 정보량은 3비트이다.

월 : 000　　화 : 001　　수 : 010　　목 : 011
금 : 100　　토 : 101　　일 : 110

또한 정보 M에 대한 정보의 엔트로피(entropy) $H(M)$는 로그함수로 정의되며, 엔트로피는 암호 시스템의 안전도를 말해 주기도 한다. 이를테면 n비트의 정보량 M에 대한 엔트로피는 다음과 같이 구하기도 한다.

$$H(M)=-\log_2\frac{1}{n}$$

만일 어떤 암호 시스템이 64비트의 키를 사용한다면 이 암호 시스템의 엔트로피는 6이다. 또 요일(3비트)을 이용하여 만든 암호의 엔트로피는 $\log_2 3$이고 남녀 (1비트)를 이용하여 만든 암호의 엔트로피는 0이다. 따라서 엔트로피가 증가할수록 더 안전한 암호 시스템이 된다.

문제 39) 불안정한 원자핵은 안정된 원자핵이 되기 위하여 방사선을 낸다. 방사선을 내는 방사성 물질에는 1896년 베크렐이 발견한 우라늄(^{235}U)과 1898년 퀴리 부부가 발견한 라듐(^{226}Ra)등이 있다. 방사선은 암의 치료뿐만 아니라 품종 개량, 식품 보존 등에 쓰이며 방사성 물질의 반감기는 멸종된 생물이 살던 시대를 추측할 때 사용된다. 반감기란 어떤 물질이 일정한 비율로 붕괴되어 반으로 감소하는 데 걸리는 시간을 뜻하는데, 우라늄의 반감기는 7억년이고 라듐의 반감기는 1600년이다.

(1) 어떤 동물의 잔해에 남아 있는 라듐의 양이 그 동물이 살던 당시의 25%라고 한다. 이 동물은 몇 년 전에 활동하였는지 알아보자.

(2) 우라늄은 21억 년 후에는 처음 양의 몇 $\%$가 되는지 알아보자.

(3) 우라늄 ag이 x억 년 후에 남은 질량을 $f(x)$라고 할 때, $f(x)$를 구하여라.

[풀이]

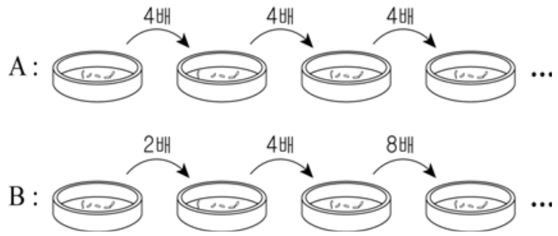
문제 40) 별의 등급은 육안으로 살펴 제일 밝은 별을 1등성, 제일 어두운 별을 6등성으로 분류하고 1등성에서 6등성까지의 밝기는 일정한 비율로 감소한다고 한다.
1등성의 밝기가 6등성의 밝기의 100배일 때, 5등성의 밝기는 6등성의 밝기의 몇 배인가? (단, 아래 표를 이용한다.)

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
10^x	1.25	1.58	1.99	2.51	3.16

① 1.25배 ② 1.58배 ③ 1.99배 ④ 2.51배 ⑤ 3.16배

[풀이]

문제 41) 어느 연구소에서 미생물 A, B의 개체수의 변화량을 조사하였다. 어느 날 정오에 조사한 미생물 A와 B의 개체수는 각각 5120, 1이었다. 그 후 미생물 A는 시간당 4배로 일정하게 증가하였고, 미생물 B는 시간당 2배, 4배, 8배, 16배$\cdots$로 증가하였다. 미생물 A의 개체수가 미생물 B의 개체수의 10배가 되는 것은 오후 몇 시인가?



① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

[풀이]

문제 42) 해수면의 빛의 밝기가 A인 어느 지역의 바닷물은 깊이가 일정하게 깊어질수록 빛의 밝기가 일정한 비율로 감소하여 깊이가 xm인 곳의 빛의 밝기를 $f(x)$라 하면 $f(x)=\mathrm{A}a^x$인 관계가 있다고 한다. 이 지역의 바다에서 깊이가 20m인 곳의 빛의 밝기는 해수면의 밝기의 16%일 때, 깊이가 10m인 곳의 밝기는 해수면의 밝기의 몇 %인지 구하여라. (단, a는 1이 아닌 양의 상수이다.)

[풀이]

문제 43) 어떤 방향제는 시간이 지남에 따라 일정한 비율로 질량이 감소하여 t시간 후에는 처음 질량의 $\dfrac{1}{10^{at}}$이 된다. 1000시간 후에 처음 질량의 $\dfrac{1}{100}$이 되었다면 처음 질량의 $\dfrac{1}{1000}$이 될 때까지 걸리는 시간을 구하면?

① 1200시간 ② 1500시간 ③ 2000시간
④ 2750시간 ⑤ 3500시간

[풀이]

문제 44) 엥겔지수란 한 가정의 총소비지출에 대한 식품비의 비율을 %로 나타낸 것이다. 즉,

$$(\text{엥겔지수}) = \frac{(\text{식품비})}{(\text{총소비지출})} \times 100(\%)$$

이다. 현재의 엥겔지수가 40%인 가정이 매년 총소비지출은 10%씩 증가하고, 식품비는 5%씩 증가한다면 10년 후 이 가정의 엥겔지수를 구하면? (단, $(1.1)^{10} = 2.6$, $(1.05)^{10} = 1.6$으로 계산한다.)

① 약 15% ② 약 25% ③ 약 35%

④ 약 45% ⑤ 약 55%

[풀이]

문제 45) 어느 핵발전소에서 사고로 방사능 물질 1000kg이 유출되어 대기를 오염시켰다. 사고가 일어나고 t년 후 대기 중의 방사능 물질의 양 A는 $\text{A} = 1000\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$이라고 한다. 대기 중에 남아 있는 방사능 물질의 양이 처음으로 100kg 이하가 되는 것은 사고 후 몇 년째부터인가? (단, $\log 2 = 0.30$으로 계산한다.)

① 90년 후 ② 100년 후 ③ 110년 후

④ 120년 후 ⑤ 130년 후

[풀이]

문제 46) 어떤 컴퓨터 바이러스는 마우스를 한 번 클릭할 때마다 자신의 파일 크기를 2배로 증가시키고, 하드디스크에 더 이상 여유 공간이 부족하여 파일의 크기를 2배로 증가시킬 수 없으면 시스템을 다운시킨다고 한다. 파일의 크기가 1000바이트인 이 바이러스 하나가 하드디스크의 빈 공간이 5기가바이트인 어느 컴퓨터에 침입하였다. 이 때, 마우스를 몇 번 클릭하면 시스템이 다운되겠는가? (단, $\log 2 = 0.3010$, 1기가바이트는 10^9바이트로 계산한다.)

[풀이]

문제 47) 소리의 세기 n데시벨(dB)은 측정하고자 하는 소리의 압력 P에 대하여 $n=10\log\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}_0}$(단, P_0는 상수)로 나타내어진다. 서로 다른 두 장소 A, B에서의 소리의 세기를 측정하였더니 각각 55데시벨과 60데시벨이었다면, B장소에서의 소리의 압력은 A장소에서의 소리의 압력의 몇 배인가?

① $\frac{12}{11}$배 ② $\sqrt{2}$배 ③ 2배 ④ $\sqrt{5}$배 ⑤ $\sqrt{10}$배

[풀이]

문제 48) 어느 자동차 세일즈 맨은 자신이 팔았던 자동차의 가격을 매년 초에 평가하여 처음 구입 가격의 $\frac{1}{5}$보다 낮은 가격으로 평가되는 해부터 새 자동차의 구입을 권유한다고 한다. 2000년 초에 2000만 원에 구입한 고객의 자동차 가격이 매년 전년도 평가가격에 비해 20%씩 낮게 평가된다고 할 때, 이 고객에게 새 자동차의 구입을 권유하기 시작하는 해를 구하여라.(단, $\log 2=0.301$로 계산한다.)

[풀이]

문제 49) 어떤 물질의 질량이 반으로 줄어드는 데 걸리는 시간을 반감기라 한다. 현재의 질량을 c그램, 반감기를 h년, x년 후에 남아 있을 물질의 질량을 y그램 이라하면 y는 x의 함수이다. 이 함수로 옳은 것은?

① $y=c\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{h}}$ ② $y=c\cdot 2^{\frac{x}{h}}$ ③ $y=\frac{c}{h}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

④ $y=c\left(1-\frac{x}{h}\right)$ ⑤ $y=c\left(\frac{1}{2}\right)^{hx}$

[풀이]

문제 50) 화석이 살아 있던 때를 추측하는 방법으로 탄소 $^{14}\mathrm{C}$를 사용한다. 탄소 $^{14}\mathrm{C}$의 양이 원래의 양의 반으로 감소하는 데 걸리는 시간 p는 약 6000년이며, 초기의 양 x_0와 t년 후에 남아 있는 양 x와의 사이에는 $x=x_0 2^{-\frac{t}{p}}$인 관계식이 성립한다고 한다. 어느 식물의 화석 속에 있는 탄소 $^{14}\mathrm{C}$의 양은 살아 있는 그 식물 속의 탄소 $^{14}\mathrm{C}$의 양의 40%라고 한다. 이 화석은 약 몇 년 전에 살아 있었겠는가?
(단, $\log 2=0.30$, $\log 3=0.48$로 계산한다.)
[풀이]

답안지

1) ⑤

2) $\frac{1}{81}$

3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4) 32

5) 8

6) 6

7) 15

8) 2

9) ㄴ, ㄷ

10) ②

11) 2

12) 8

13) ⑤

14) ②

15) $\frac{5}{4}$

16) 18

17) ㄱ,ㄴ,ㄷ,ㄹ

18) ⑤

19) ②

20) ②

21) ④

22) 64

23) $\frac{1}{3}$

24) $-\frac{1}{8}$

25) 최대값 -1, 최소값 -2

26) $\frac{1}{3}$

27) (1) 최대값 : 100, 최소값 : 0.01 (2) $1000\sqrt[3]{10}$

28) 16

29) ③

30) 18

31) (1) $f(0)=1$ (2) $f(2)=49$, $f(3)=343$

32) 4.25

33) $a=\log_3 \frac{3}{2}=1-\log_3 2$

34) ⑤

35) ①

36) ①

37) ④

38) ⑤

39) (1) 3200년 (2) 12.5% (3) $f(x)=a\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{7}}$

40) ④

41) ③

42) 40%

43) ②

44) ②

45) ②

46) 23번

47) $\sqrt{10}$배

48) 2008년

49) ①

50) 8000년